Soluții – clasa a X-a

1. Avem: $a_{1+1} \ge 2\sqrt{a_1}, \ldots\ldots, a_n + 1 \ge 2\sqrt{a_n}$,

de unde $a_{1+}a_2 + \ldots\ldots + a_n + n \ge 2(\sqrt{a_1} + \cdots + \sqrt{a_2})$

Daca am avea si

$\sqrt{a_1} + \cdots + \sqrt{a_n} \ge n$,

prin adunare rezulta inegalitatea ceruta.

Se presupune deci ca

$\sqrt{a_1} + \cdots + \sqrt{a_n} < n$

Avem 1=$\frac{a_1+\cdots+a_n+a_1a_2\ldots a_n}{n+1} \ge \sqrt[n+1]{(a_1\ldots a_n)^2}$,

de unde $a_{1+}a_2 + \ldots\ldots + a_n \le 1$.

Dar cum $a_1 + \cdots + a_n + a_1a_2\ldots a_n = n+1$,

Rezulta $a_1 + a_2 + \cdots + a_n \ge n$ si daca

$a_1 + a_2 + \cdots + a_n \ge n > \sqrt{a_1} + \cdots + \sqrt{a_n}$

2. Avem că f(xyz)=f(xy)*f(z)+k=f(x)*f(y)*f(z) + kf(z)+k.

Simultan, avem însă f(xzy)=f(xz)*f(y)+k=f(x)*f(z)*f(y)+kf(y)+k.

Deci, cum f injectivă, obținem k=0.

Observăm că f(1)=f^2(1)=f^2(-1).

Dacă f(1)=0, atunci f(x)=0 pentru orice x contradicție cu injectivitatea.

Dacă f(1)=-1, atunci f(x)=-f(x) deci f(x)=0 pentru orice x contradicție.

Deci f(1)=1, atunci cum |f(-1)|=1 şi f(1)=1 şi 1≠-1 atunci f(-1)=-1, deci f(-x)=-f(x) contradicție

3. Funcție f:**R**→**R**, f(x)=$x^3+\frac{1}{2}$ este strict crescătoare.

Se observă că ecuația se poate scrie f(f(x))=x şi se arată ce aceasta este echivalentă cu f(x)=x, care are soluțiile $x_1=1$, $x_{2,3}=-1\pm\frac{\sqrt{5}}{2}$.

4.

1	Luăm $z_O = 0$ şi $z_A = R(\cos\alpha + i\cdot\sin\alpha)$, $z_B = R(\cos\beta + i\cdot\sin\beta)$, $z_C = R(\cos\gamma + i\cdot\sin\gamma)$.	
	Avem $a^2 = \lvert z_B - z_C\rvert^2 = R^2\left[(\cos\beta-\cos\gamma)^2 + (\sin\beta - \sin\gamma)^2\right] = = 2R^2\left[1-\cos(\beta-\gamma)\right]$ (1). Permutări ciclice.	0,5p
	$2\cdot z_{A'} = z_B + z_C = R\left[(\cos\beta+\cos\gamma) + i\cdot(\sin\beta+\sin\gamma)\right]$ etc	0,25 p
	Căutăm $D\in BC$, încât $AD\perp BC$, adică $t\in$ □, astfel ca $z_D = t\cdot z_B +$	1p

	$+(1-t)\cdot z_C$. Găsim $2a^2\cdot t=a^2+b^2-c^2$ şi apoi $2a^2\cdot z_D=\left(a^2+b^2-c^2\right)\cdot z_B$ $+\left(a^2-b^2+c^2\right)\cdot z_C$.	
	Urmează $4a^2\cdot z_{D'}=2a^2\cdot z_A+\left(a^2+b^2-c^2\right)\cdot z_B+\left(a^2-b^2+c^2\right)\cdot z_C$	0,25 p
	Tota	
2	Un punct K al dreptei $A'D'$ este dat de $k\in\square$, astfel încât $z_K=k\cdot z_{D'}+$ $+(1-k)\cdot z_{A'}$, adică $4a^2\cdot z_K=2a^2k\cdot z_A+\left[2a^2+k\cdot\left(b^2-a^2-c^2\right)\right]\cdot z_B+$ $+\left[2a^2+k\cdot\left(c^2-a^2-b^2\right)\right]\cdot z_C$ (2)	1p
	Variante. Se poate impune coliniaritatea punctelor B',E',K, eventual exprimând aria triunghiului $B'E'K$. Se poate raţiona sintetic: concurenţă în triunghiul $A'B'C'$ a izotomicelor înălţimilor.	
	O exprimare similară este dată de $h\in\square$, astfel ca $4a^2\cdot z_K=2a^2h\cdot z_B+$ $+\left[2b^2+h\cdot\left(a^2-b^2-c^2\right)\right]\cdot z_A+\left[2b^2+k\cdot\left(c^2-a^2-b^2\right)\right]\cdot z_C$. Cele două exprimări coincid dacă $h\left(-a^2+b^2+c^2\right)+2kb^2=2b^2$, $2ha^2+k\left(a^2-b^2+c^2\right)=2a^2$.	1p
	Se poate evidenţia consecinţa $(h+k)\left(a^2+b^2+c^2\right)=2\left(a^2+b^2\right)$.	
	Eliminând h găsim $k\left(a^2+b^2+c^2\right)=2a^2$ (3) şi urmează $\left(a^2+b^2+c^2\right)\cdot z_K$ $=a^2\cdot z_A+b^2\cdot z_B+c^2\cdot z_C$ (4). Simetria relaţiei asigură şi celelalte coliniar	
	Se observă că punctul K este al lui Lemoine. Această observare poate substitui oricare dintre cele 3 etape dar nu poate fi notată decât cu 1 punct.	
	3p	
3	Folosind (3) avem $K\in(A'D'\Leftrightarrow k>0$, evidentă şi $K\in(D'A'\Leftrightarrow k<1\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow b^2+c^2>a^2$.	1p
4	Cu $OK=\lvert z_K\rvert$ relaţia (4) dă $OK^2=\left(a^2\cos\alpha+b^2\cos\beta+c^2\cos\gamma\right)^2+$ $+\left(a^2\sin\alpha+b^2\sin\beta+c^2\sin\gamma\right)^2=a^4+b^4+c^4+2a^2b^2\cos(\alpha-\beta)+$ $+2a^2c^2\cos(\alpha-\gamma)+2b^2c^2\cos(\beta-\gamma)$. Folosind (1) deducem relaţia din enun	1 p